

Transport de l'électricité

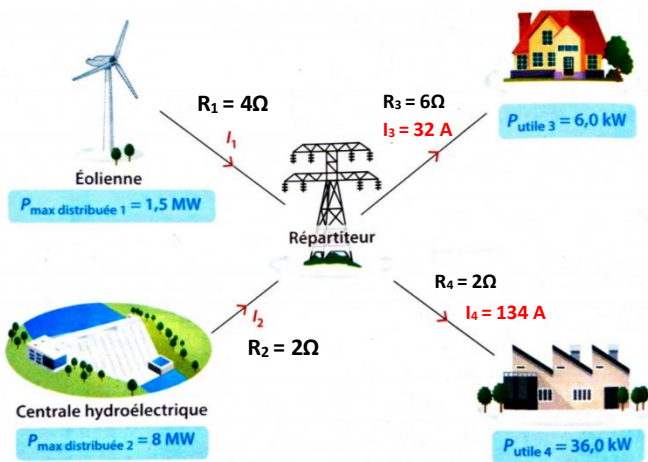
Comment modéliser et optimiser un réseau de distribution électrique

L'énergie électrique consommée et produite varie à chaque instant. Distribuer cette énergie partout en France en minimisant les pertes par effet Joule est un problème complexe que les mathématiques et la physique permettent de résoudre.

Mais comment modéliser un réseau électrique par un graphe orienté ? Et comment minimiser les pertes par effet Joule sur ce réseau de distribution électrique modélisé ?

Documents :

Doc.1 : Réseau de distribution électrique simple à optimiser



Rappel : 1kW = 10³ W et 1 MW = 10⁶ W

- Une éolienne et une centrale hydroélectrique alimentent le réseau avec des puissances électriques maximales différentes ($P_{\text{max distribuée}}$), et des intensités I_1 et I_2 ajustables.
- Deux usagers, aux besoins différents (P_{utile}) utilisent et reçoivent des intensités différentes I_3 et I_4 connues et fixées.
- La distribution se fait par 4 câbles de résistances différentes connues (R_1, R_2, R_3 et R_4) parcourus respectivement par des intensités I_1, I_2, I_3 et I_4 .
- Un répartiteur permet d'ajuster productions et besoins en tenant compte des pertes par effet Joule le long des différents câbles.

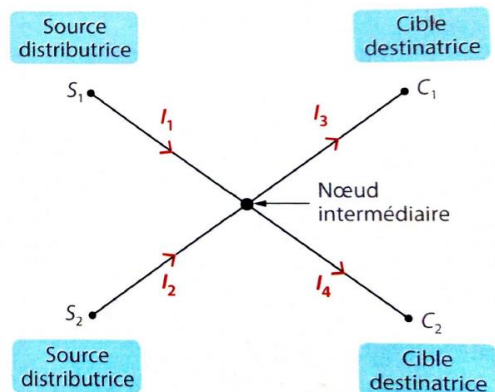
Doc.2 : Modélisation par un graphe orienté

Un graphe orienté permet de modéliser mathématiquement un réseau électrique simplifié.

Le réseau du document 1 est modélisé par un ensemble de points :

- deux sources distributrices S_1 et S_2
- deux cibles destinatrices C_1 et C_2
- un nœud intermédiaire.

Ces points sont reliés par des **segments orientés** appelés **arcs**.



Doc.3 : Contraintes sur un réseau de distribution électrique

Pour minimiser les pertes par effet Joule sur un réseau électrique, il faut tenir compte de différentes contraintes :

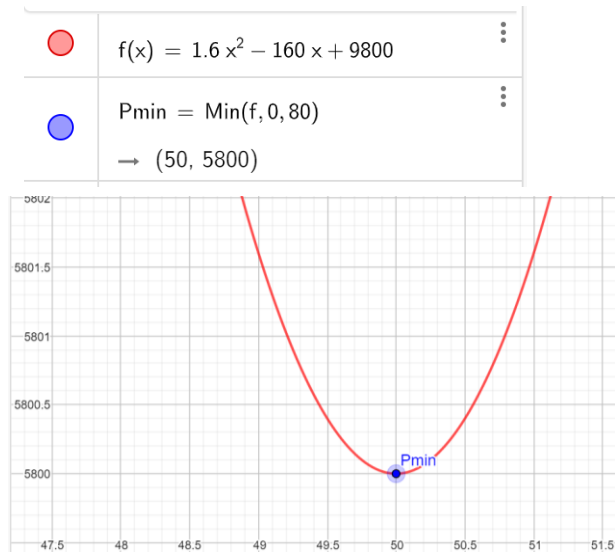
- 1 **Chaque source distributive (S_1, S_2) ne peut délivrer qu'un courant maximal ($I_{1\text{max}}, I_{2\text{max}}$)** car leur puissance de production $P_{\text{max distribuée}}$ est limitée.
- 2 D'après **la loi des nœuds**, l'intensité totale qui entre dans un nœud est égale à l'intensité totale qui en sort.
- 3 Chaque cible destinatrice (C_1, C_2) impose une valeur d'intensité du courant qu'elle utilise : **les valeurs de I_3 et I_4 sont connues et fixées**

Doc.4 : Comment minimiser mathématiquement les pertes par effet Joule ?

Minimiser la puissance totale perdue par effet Joule sur l'ensemble d'un réseau signifie qu'il faut **définir et étudier la fonction $P_{J\text{ totale}}(I_1) = P_{J1} + P_{J2} + P_{J3} + P_{J4}$ avec $P_{J1} = R_1 \times I_1^2 \dots$ etc...;**
 puis **trouver mathématiquement la valeur d'intensité I_1 qui permet d'obtenir une valeur minimale pour la fonction $P_{J\text{ totale}}$** en tenant compte des contraintes du document 3.

Point Maths : Comment déterminer le minimum d'une fonction ?

Prenons un exemple : soit f une fonction définie par $f(x) = 1,6x^2 - 160x + 9800$

Méthode 1 : avec le logiciel Geogebra**Méthode 2 : à partir de la dérivée de la fonction**

f est un polynôme du 2nd degré dont la fonction dérivée est égale à :

$$f'(x) = 3,2x - 160$$

On résout l'équation :

$$f'(x) = 3,2x - 160 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 50$$

Ainsi, le tableau de variation de la fonction f est :

x	0	50	80	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

⇒ La fonction f admet un minimum $f = 5800$ qui est atteint pour $x = 50$.

Questions :

- 1) Réaliser un graphe orienté correspondant au réseau de distribution électrique du doc.1
- 2) Pour répondre à la **contrainte ①** du doc.3, **calculer** les valeurs d'intensité maximum $I_{1\max}$ et $I_{2\max}$ que peuvent fournir chacune des deux sources de production.
- 3) **Exprimer** la puissance totale $P_{J\text{ totale}}$ dissipée par effet Joule sur l'ensemble du réseau électrique en **fonction de I_1, I_2, I_3 et I_4**
- 4) Dans l'expression précédente de la puissance dissipée par effet Joule $P_{J\text{ totale}}$, **remplacer I_3 et I_4 par leurs valeurs (contrainte ③ du doc.3)** puis **établir la nouvelle expression de $P_{J\text{ totale}}$ en fonction de I_1 et I_2**
- 5) **Appliquer la loi des nœuds (contrainte ② du doc.3)** pour établir une relation mathématique entre I_1, I_2, I_3 et I_4 ; **en déduire** une expression de l'intensité du courant I_2 en fonction de I_1 .
- 6) **Remplacer I_2 dans la fonction $P_{J\text{ totale}}$ par son expression trouvée précédemment.**
- 7) **En déduire que $P_{J\text{ totale}} = 6xI_1^2 - 664xI_1 + 97168$.**

Point Maths :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

8) A l'aide du doc.4, **déterminer** par la méthode de votre choix **la valeur de l'intensité du courant I_1** qui permet de minimiser les pertes par effet Joule dans le réseau.

9) **En déduire la valeur de l'intensité du courant I_2** minimisant ces pertes par effet Joule dans le réseau.